

# Anfachung von Elektronen-Plasmaschwingungen durch Stoßwellen\*

Von J. D. WELLY

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Hannover  
(Z. Naturforsch. **18 a**, 1157–1168 [1963]; eingegangen am 13. August 1963)

The velocity distribution of the electrons within a plasma shock front is investigated by methods of the kinetic theory arranged in a manner to account for heavy deviations from thermodynamic equilibrium. The distribution function exhibits two peaks and becomes unstable with respect to electron oscillations if the shock wave is sufficiently strong (Mach number  $M \gtrsim 6.5$ ). The second peak is formed by run-away-electrons, i. e. those fast electrons which transgress the shock front from the hot region. The frequencies, wave numbers, growing rates, phase and group velocities of the excited oscillations, and the influence of the Ohmic damping are calculated approximatively. The results are applied to the non-thermal radiofrequency radiation of the sun.

Longitudinale Elektronen-Plasmaschwingungen unterscheiden sich von gewöhnlichen Schallwellen vor allem dadurch, daß nur die Elektronenkomponente des Plasmas wesentlich an der Schwingungsbewegung beteiligt ist, so daß periodische Raumladungen entstehen. Die rüctreibenden Kräfte rühren weniger vom Druck her als von dem elektrischen Feld, welches durch diese Raumladungen aufgebaut wird. Die Frequenz ist stets gleich oder nur wenig größer als die Elektronen-Plasmafrequenz<sup>1</sup>

$$\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m_e},$$

wo  $n_e$  die Dichte und  $m_e$  die Masse der Elektronen bedeutet. In dieser Arbeit soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen und auf welche Weise in einem vollionisierten Wasserstoffplasma ohne Magnetfeld derartige Schwingungen durch Stoßwellen angefaßt werden können. Unter Stoßwellen sind dabei, genau wie in einem neutralen Gas, Störungen großer Amplitude zu verstehen, die sich mit Überschallgeschwindigkeit im Plasma ausbreiten. Da für die Anfachung von Plasmaschwingungen die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen ausschlaggebend ist, müssen die Untersuchungen mittels der kinetischen Theorie durchgeführt werden, deren Grundlagen in Abschnitt 1 zusammengestellt sind. In den Abschnitten 2 und 3 werden diejenigen Tatsachen über Plasmastöße und Elektronenschwingungen behandelt, die in den folgenden Teilen der Arbeit benötigt werden. Das eigentliche Pro-

blem wird dann zunächst qualitativ in Abschnitt 4 und quantitativ in den Abschnitten 5 bis 7 behandelt. Abschnitt 8 befaßt sich mit einer Anwendung der Ergebnisse auf die überthermische Radiofrequenzstrahlung der Sonne.

Auf die Möglichkeit einer Erzeugung von Plasmaschwingungen durch Stoßwellen ist im Hinblick auf astrophysikalische Probleme bereits mehrfach hingewiesen worden<sup>2–5</sup>. KÖLBEL<sup>6</sup> hat mittels hydrodynamischer Methoden gezeigt, daß durch hinreichend starke Stöße Plasmaschwingungen angefaßt werden können. Er beschränkt sich dabei jedoch auf solche Lösungen, bei denen die Amplitude, von einem mitbewegten Bezugssystem aus gesehen, nur vom Ort, aber nicht von der Zeit abhängt. Solche Schwingungen treten aber erst bei sehr starken Stoßwellen ( $M \gtrsim 50$ ) auf. Es wird sich zeigen, daß bereits bei wesentlich kleineren Mach-Zahlen Schwingungserregung möglich ist.

## 1. Grundlagen der kinetischen Plasmatheorie

In der kinetischen Theorie wird der Zustand eines vollionisierten Plasmas durch die Geschwindigkeitsverteilungen  $F_i$  und  $F_e$  der Ionen und Elektronen bestimmt. Wir behandeln nur eindimensionale Vorgänge. In diesem Fall hängen  $F_i$  und  $F_e$  außer von der Teilchengeschwindigkeit  $v$  und der Zeit  $t$  nur noch von der Ortskoordinate  $x$  ab. In einem Wasser-

\* Dissertation, Hannover 1963.

<sup>1</sup> L. TONKS u. I. LANGMUIR, Phys. Rev. **33**, 195 [1929].

<sup>2</sup> R. W. LARENZ, Z. Naturforsch. **10 a**, 901 [1955].

<sup>3</sup> K. C. WESTFOLD, Phil. Mag. (8), **2**, 1287 [1957].

<sup>4</sup> C. DE JAGER, in Probleme des Plasmas in Physik und Astronomie, Akademie-Verlag, Berlin 1958, S. 38.

<sup>5</sup> C. DE JAGER, Handbuch der Physik, Bd. LII, Springer-Verlag, Berlin 1959, S. 80.

<sup>6</sup> J. KÖLBEL, a) Dissertation, Hannover 1960; b) AFCRC-Report, ASTIA Document Nr. 262277.



stoffplasma gilt dann bei Abwesenheit von Magnet- und Gravitationsfeldern

$$\frac{\partial F_a}{\partial t} + v_x \frac{\partial F_a}{\partial x} \pm \frac{e}{m_a} E \frac{\partial F_a}{\partial v_x} = \left( \frac{\partial F_a}{\partial t} \right)_c. \quad (1)$$

Der Index  $a$  ist durch  $i$  bzw.  $e$  zu ersetzen. Das obere Vorzeichen gilt für Ionen, das untere für Elektronen. Das rechtsseitige Symbol ist eine Abkürzung für die Wechselwirkungsglieder, welche die durch Stöße oder kollektive Wechselwirkung der Ladungsträger untereinander hervorgerufene zeitliche Änderung der Geschwindigkeitsverteilung beschreiben. Näheres hierüber findet man im Anhang A.

Zu Gl. (1) tritt noch die Poissonsche Gleichung für das elektrische Feld

$$\partial E / \partial x = 4 \pi e (n_i - n_e) \quad (2)$$

mit  $n_a = \int F_a dv$  und  $dv = dv_x dv_y dv_z$ .

Das Plasma befindet sich im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn die rechte Seite von (1) verschwindet. Das ist nur bei MAXWELLSchen Geschwindigkeitsverteilungen mit gleichen Strömungsgeschwindigkeiten und Temperaturen für die Ionen und Elektronen der Fall. Die Gleichgewichtsverteilung heißt also

$$F_a = n_a \left( \frac{m_a}{2 \pi \kappa T} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{m_a}{2 \kappa T} (v - v_0)^2 \right\}. \quad (3)$$

## 2. Plasma-Stoßwellen

Stoßwellen gehen aus gewöhnlichen Schallwellen hervor, wenn die Amplitude so groß wird, daß zur mathematischen Behandlung eine Linearisierung der Grundgleichungen nicht mehr zulässig ist. Äußerlich unterscheiden sie sich von Schallwellen durch ihre größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit und den steilen Dichte- und Temperaturanstieg innerhalb einer Zone von der Breite einiger mittlerer freier Weglängen, die als Stoßfront bezeichnet wird.

Bei ebenen, stationären Stoßwellen, die wir hier ausschließlich behandeln wollen, hängen die Zustandsgrößen des Plasmas nur von  $x' = x - v_1 t$  ab, wobei  $v_1$  die Geschwindigkeit der Stoßwelle und  $x$  die Ortskoordinate im Laborsystem ist.  $x'$  ist dann die Ortskoordinate in einem mitbewegten System.

In genügend weiter Entfernung vor und hinter der Stoßfront befindet sich das Plasma im thermodynamischen Gleichgewicht, es gelten dort also die MAXWELLSchen Geschwindigkeitsverteilungen (3). Da wir von einem äußeren elektrischen Feld absehen

wollen, ist dort nach (2) außerdem  $n_i = n_e = n$ . Kennzeichnet man die Zustandsgrößen an diesen Stellen durch die Indizes 1 und 2, so ist demnach vom mitbewegten System aus gesehen

$$F_{a1,2} = n_{1,2} \left( \frac{m_a}{2 \pi \kappa T_{1,2}} \right)^{3/2} \cdot \exp \left\{ - \frac{m_a}{2 \kappa T_{1,2}} [(v_x + v_{1,2})^2 + v_y^2 + v_z^2] \right\}. \quad (4)$$

Das Plasma strömt also mit den Geschwindigkeiten  $-v_1$  bzw.  $-v_2$ . Vom Laborsystem aus gesehen läuft dagegen die Stoßwelle mit der Geschwindigkeit  $+v_1$  in  $x$ -Richtung.

Der Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen vor und hinter der Stoßfront ergibt sich aus den Erhaltungssätzen für die Teilchenzahlen, den Impuls und die Energie. Diese Gesetze besagen, daß im mitbewegten System die folgenden Größen räumlich konstant sein müssen:

Der Ionen- und der Elektronenstrom  $\int v_x F_a dv$ .

Der Impulstransport  $m_i \int v_x^2 F_i dv + m_e \int v_x^2 F_e dv$ .

Der Energietransport

$$\frac{m_i}{2} \int v_x v^2 F_i dv + \frac{m_e}{2} \int v_x v^2 F_e dv.$$

Einsetzen der Verteilungsfunktionen (4) und Gleichsetzen führt auf die bekannten HUGONIOT-Gleichungen:

$$n_1 v_1 = n_2 v_2, \quad (5)$$

$$(m_i + m_e) n_1 v_1^2 + 2 n_1 \kappa T_1 = (m_i + m_e) n_2 v_2^2 + 2 n_2 \kappa T_2, \quad (6)$$

$$(m_i + m_e) n_1 v_1^3 + 10 n_1 v_1 \kappa T_1 = (m_i + m_e) n_2 v_2^3 + 10 n_2 v_2 \kappa T_2. \quad (7)$$

Als Maß für die Stärke der Stoßwelle führen wir die MACH-Zahl  $M$  ein, das Verhältnis der Stoßwellengeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit:

$$M = v_1 \sqrt{\frac{3(m_i + m_e)}{10 \kappa T_1}}. \quad (8)$$

Damit folgt aus den HUGONIOT-Gleichungen

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{4 M^2}{M^2 + 3}, \quad (9)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(M^2 + 3)(5 M^2 - 1)}{16 M^2}. \quad (10)$$

Hinter der Stoßfront ist die Dichte also höchstens viermal so groß wie im ungestörten Plasma vor der Stoßfront. Das Temperaturverhältnis wächst dagegen mit zunehmender MACH-Zahl über alle Grenzen. Das

Plasma verhält sich in dieser Hinsicht also wie ein einatomiges neutrales Gas.

Die bisherigen Rechnungen sagen noch nichts über die Struktur der Stoßfront selbst aus. Dieses Problem ist in den letzten Jahren vielfach behandelt worden, und zwar meistens mittels der hydrodynamischen Zweiflüssigkeitstheorie. Wir verweisen auf die Arbeiten von JUKES<sup>7</sup> und KÖLBEL<sup>6</sup>, deren wesentliche Ergebnisse in Abb. 1 skizziert sind. Bemerkenswert ist der Anstieg der Elektronentemperatur  $T_e$  im vorderen Teil der Stoßfront und die Ausbildung einer Raumladung, durch die ein elektrisches Feld  $E$  erzeugt wird.

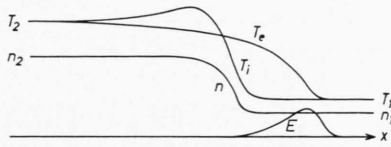


Abb. 1. Struktur einer Plasma-Stoßfront (schematisch).

Auf beide Erscheinungen wird in Abschnitt 4 noch näher eingegangen.

Die Berechnung der Struktur einer Plasma-Stoßwelle mittels der kinetischen Theorie ist bisher noch nicht in befriedigender Weise gelungen, da die Grundgleichungen (1) und (2) bei den starken Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht, wie sie in der Stoßfront auftreten, schwer zu lösen sind.

### 3. Elektronenschwingungen im Plasma

Zur Behandlung der Elektronen-Plasmaschwingungen gehen wir von den Grundgleichungen (1) und (2) aus. Dabei kann der Einfluß der Schwingungen auf  $F_i$  wegen der großen Masse der Ionen vernachlässigt werden. Wegen der Quasineutralität des Plasmas ist daher  $n_i = n_{e0}$ , wobei  $n_{e0}$  die Dichte der Elektronen im ungestörten Zustand bedeutet. Ferner sollen die Wechselwirkungsglieder auf der rechten Seite von (1) vernachlässigt werden. Diese Glieder bewirken eine im allgemeinen sehr kleine Dämpfung der Schwingungen, die in Abschnitt 7 auf andere Weise behandelt wird. Integration der Gl. (1) über  $v_y$  und  $v_z$  ergibt dann für die Elektronen

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_e}{\partial x} - \frac{eE}{m_e} \frac{\partial f_e}{\partial v_x} = 0 \quad (11)$$

mit 
$$f_e = \iint F_e dv_y dv_z.$$

Aus der Poissonschen Gleichung (2) wird

$$\partial E / \partial x = 4 \pi e (n_{e0} - n_e). \quad (12)$$

Faßt man die Plasmaschwingung als kleine Störung von  $f_e$  und  $E$  auf, deren Zeit- und Ortsabhängigkeit durch den Faktor  $\exp(i \omega t - i k x)$  gegeben ist, und nimmt man an, daß  $E$  im ungestörten Zustand verschwindend klein ist, so erhält man aus (11) und (12) die bekannte Dispersionsformel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_{e0} / \partial v_x}{v_x - \omega / k} dv_x = \frac{m_e k^2}{4 \pi e^2}. \quad (13)$$

$f_{e0}$  ist die Verteilungsfunktion  $f_e$  im ungestörten Zustand. (13) dient zur Bestimmung der Frequenz  $\omega$  bei gegebener Wellenzahl  $k$ . Wir setzen  $k$  als reell und  $\omega$  als komplex mit nicht verschwindendem Imaginärteil voraus, da wir nur an Wellen mit zeitlich zunehmender Amplitude interessiert sind. Da in (13) außer  $\omega$  nur reelle Größen auftreten, muß mit  $\omega$  auch der konjugiert komplexe Wert von  $\omega$  eine Lösung sein, d. h. anwachsende und abklingende Lösungen sind paarweise vorhanden. Hiernach ist zu vermuten, daß die Dispersionsformel nur unter gewissen Bedingungen komplexe Lösungen besitzt, da sich sonst in jedem Plasma spontan Schwingungen erregen müßten. In der Tat hat NOERDLINGER<sup>8</sup> gezeigt, daß komplexe Lösungen nur dann vorhanden sind, wenn die Funktion  $f_{e0}(v_x)$  ein Minimum, also mindestens zwei Maxima besitzt und wenn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_{e0} / \partial v_x}{v_x - v_{\min}} dv_x > 0 \quad (14)$$

ist. Die Schwingungserregung, die in diesem Fall eintritt, wird häufig auch als Doppelstrom-Instabilität bezeichnet. Sie beruht auf einer Umwandlung von Strömungs- in Schwingungsenergie. Näheres über diesen Anfachungsmechanismus findet man bei JACKSON<sup>9</sup>, wo er als *bunching* bezeichnet wird.

### 4. Qualitative Beschreibung der Vorgänge in der Stoßfront

In Abschnitt 3 hatten wir darauf hingewiesen, daß sich Schwingungen nur dann erregen können, wenn die Verteilungsfunktion  $f_e$  ein Minimum, also eine Einsattelung aufweist. Wir wollen daher in die-

<sup>7</sup> J. D. JUKES, J. Fluid Mech. **3**, 275 [1957].

<sup>8</sup> P. D. NOERDLINGER, Phys. Rev. **118**, 879 [1960].

<sup>9</sup> J. D. JACKSON, J. Nucl. Energy C **1**, 171 [1959/60].

sem Abschnitt untersuchen, ob sich in einer Stoßfront überhaupt eine solche Form der Geschwindigkeitsverteilung herausbilden kann. Dazu betrachten wir die Verteilungsfunktionen  $f_{e1}$  und  $f_{e2}$  vom Laborsystem aus. Zu ihrer Berechnung haben wir in (4) das  $v_x$  durch  $v_x - v_1$  zu ersetzen, womit der Übergang zum Laborsystem vollzogen ist, und über  $v_y$  und  $v_z$  zu integrieren. Es ergibt sich

$$f_{e1} = n_1 \left( \frac{m_e}{2\pi\kappa T_1} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{m_e}{2\kappa T_1} v_x^2 \right\}, \quad (15)$$

$$f_{e2} = n_2 \left( \frac{m_e}{2\pi\kappa T_2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{m_e}{2\kappa T_2} (v_x - v_1 + v_2)^2 \right\}. \quad (16)$$

Diese Funktionen sind für den Fall  $M=10$  in Abb. 2 dargestellt. Man sieht, daß die Geschwindigkeit eines großen Teils der Elektronen hinter der Stoßfront wesentlich größer ist als die Stoßwellengeschwindigkeit

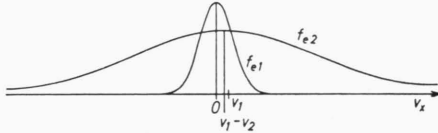


Abb. 2. Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen vor und hinter der Stoßfront bei  $M=10$ . Nach (9) und (10) ist  $n_2/n_1=3,9$  und  $T_2/T_1=32,1$ .

keit  $v_1$ . Diese Elektronen sind daher in der Lage, die Stoßwelle zu überholen und in das Gebiet vor der eigentlichen Stoßfront einzudringen. Da die Energieübertragung beim Stoß zweier Teilchen ungefähr proportional zu ihrem Massenverhältnis ist, geben sie ihre Energie vorwiegend an die dort vorhandenen Elektronen ab, während die Ionen kaum beeinflusst werden. Außerdem bauen sie eine Raumladung auf. Damit ist qualitativ erklärt, wie der in Abb. 1 dargestellte Anstieg der Elektronentemperatur und das elektrische Feld im vorderen Teil der Stoßfront zustande kommt.

Es ist nun naheliegend, im Bereich vor der Stoßfront zwischen *thermischen* und *run-away-Elektronen* zu unterscheiden. Unter den letzteren verstehen wir diejenigen, welche die Stoßfront überholt und das elektrische Feld überwunden haben, deren Geschwindigkeit aber trotzdem noch größer ist als die thermische Elektronengeschwindigkeit vor der Stoßfront. Sie werden durch dynamische Reibung mit einer Kraft abgebremst, die umgekehrt proportional zum Quadrat ihrer Geschwindigkeit ist. Daraus ist zu schließen, daß mit zunehmender Entfernung von der Stoßfront die Zahl der langsameren run-away-Elek-

tronen sehr viel rascher abnimmt als die der schnelleren. Die Geschwindigkeitsverteilung wird daher in einem vor der eigentlichen Stoßfront liegenden Gebiet, das wir als *Anfachungsgebiet* bezeichnen wollen, die in Abb. 3 skizzierte Form annehmen. Wenn das Minimum genügend tief ist, sind die Voraussetzungen für die Doppelstrom-Instabilität erfüllt und es ist Schwingungsanfachung zu erwarten.

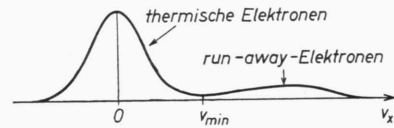


Abb. 3. Geschwindigkeitsverteilung im Anfachungsgebiet (schematisch).

Das Minimum in der Verteilungsfunktion wird sich allerdings nur bei hinreichend starken Stoßwellen herausbilden. Ist die Stoßwelle so schwach, daß sich  $f_{e1}$  und  $f_{e2}$  nur wenig voneinander unterscheiden, so verliert die Unterscheidung zwischen thermischen und run-away-Elektronen ihren Sinn. Die Verteilungsfunktion weicht in diesem Fall an keiner Stelle wesentlich von der Gleichgewichtsverteilung ab und ist daher überall stabil.

## 5. Näherungsweise Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung im Anfachungsgebiet

Auf Grund der in Abschnitt 4 angestellten Überlegungen läßt sich die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen im Anfachungsgebiet in zwei Anteile zerlegen:

$$F_e = F_t + F_r. \quad (17)$$

$F_t$  ist die Geschwindigkeitsverteilung der thermischen und  $F_r$  die der run-away-Elektronen. Die zugehörigen Dichten, Temperaturen usw. sollen im folgenden durch die Indizes t bzw. r gekennzeichnet werden.

Mit zunehmender Entfernung von der Stoßfront muß  $F_t$  gegen  $F_{e1}$  und  $F_r$  gegen 0 gehen. Wir erwarten daher, daß im Anfachungsgebiet folgende Beziehungen gelten:

$$F_t \approx F_{e1} = n_1 \left( \frac{m_e}{2\pi\kappa T_1} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_e}{2\kappa T_1} v^2 \right\}, \quad (18)$$

$$n_r \ll n_t \approx n_1. \quad (19)$$

In erster Näherung können wir also  $F_t = F_{e1}$  setzen. Diese Näherung läßt sich jedoch noch verbessern, indem wir die Aufheizung der thermischen Elektronen durch die run-away-Elektronen berücksichtigen



und in der MAXWELL-Verteilung (18) die Temperatur  $T_1$  durch  $T_t = T_t(x - v_1 t) > T_1$  ersetzen. Die Temperatur  $T_t$  ergibt sich dann aus dem Energiesatz, bei dessen Anwendung der Energieaustausch mit den Ionen wegen des großen Massenverhältnisses  $m_i/m_e$  vernachlässigt werden kann. Das gleiche gilt für die Energieabgabe an das elektrische Feld (vgl. Anhang B). Mit diesen Vernachlässigungen lautet der Energiesatz für die Elektronen

$$\frac{m_e}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int v^2 (F_t + F_r) dv + \frac{\partial}{\partial x} \int v_x v^2 (F_t + F_r) dv \right] = 0. \quad (20)$$

Diese Gleichung besagt, daß die zeitliche Änderung der Energiedichte gleich der negativen Divergenz des Energiestroms sein muß. Sie läßt sich sofort integrieren, da die vorkommenden Größen nur von  $x' = x - v_1 t$  abhängen und daher  $\partial/\partial t = -v_1 \partial/\partial x$  ist. Die Integrationskonstante ergibt sich aus dem Anfangswert  $T_t = T_1$  für  $F_r = 0$ . Führt man die Integration durch und setzt für  $F_t$  die MAXWELL-Verteilung

$$F_t = n_1 \left( \frac{m_e}{2 \pi \kappa T_t} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_e}{2 \kappa T_t} v^2 \right\} \quad (21)$$

ein, so erhält man

$$\frac{3}{2} n_1 v_1 \kappa (T_t - T_1) = \frac{m_e}{2} \int (v_x - v_1) v^2 F_r dv. \quad (22)$$

Hiernach läßt sich  $T_t$  und damit  $F_t$  angeben, wenn  $F_r$  bekannt ist.

$F_r$  ergibt sich nach I aus der Gleichung

$$\frac{\partial F_r}{\partial t} + v_x \frac{\partial F_r}{\partial x} - \frac{e E}{m_e} \frac{\partial F_r}{\partial v_x} = \left( \frac{\partial F_r}{\partial t} \right). \quad (23)$$

An dieser Gleichung nehmen wir nun einige Vereinfachungen vor:

1. Das dritte Glied wird weggelassen. Wir werden den Einfluß des elektrischen Feldes dafür bei der Aufstellung der Randbedingungen berücksichtigen. Im Anhang B wird gezeigt, daß durch dieses Verfahren kein nennenswerter Fehler verursacht wird.

2. Da die Konzentration der run-away-Elektronen nach (19) sehr klein sein soll, kann ihre gegenseitige Wechselwirkung gegenüber der Wechselwirkung mit den thermischen Elektronen und den Ionen vernachlässigt werden.

3. Bei der Berechnung der Wechselwirkung mit den thermischen Elektronen und den Ionen soll deren Dichte gleich  $n_1$  und ihre Temperatur gleich 0 gesetzt werden. Bei nicht zu schwachen Stoßwellen

ist dies zulässig, weil die Temperaturen  $T_1$  bzw.  $T_t$  der thermischen Teilchen wesentlich kleiner sind als die Temperatur der run-away-Elektronen, die in der Größenordnung von  $T_2$  liegt.

Mit diesen Vereinfachungen erhält die Gl. (23) folgende Form (Herleitung im Anhang A):

$$\frac{\partial F_r}{\partial t} + v u \frac{\partial F_r}{\partial x} = \frac{\alpha}{v^3} \left[ v \frac{\partial F_r}{\partial v} + (1 - u^2) \frac{\partial^2 F_r}{\partial u^2} - 2 u \frac{\partial F_r}{\partial u} \right]. \quad (24)$$

Dabei ist

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (25)$$

$$u = v_x/v = \cos \vartheta, \quad (26)$$

$$\alpha = \frac{4 \pi e^4 n_1}{m_e^2} \ln \left( \frac{3 \kappa T_2}{4 e^3} \sqrt{\frac{\kappa T_1}{\pi n_1}} \right). \quad (27)$$

Die Grundlösung von (24) hat die Form

$$F_r(x - v_1 t, v, u, p) = G(w, u) \exp \left\{ -p \left[ \alpha (x - v_1 t) - \frac{1}{3} v_1 v^3 \right] \right\}. \quad (28)$$

$p$  ist ein freier Parameter und

$$w = p^{1/4} v. \quad (29)$$

Einsetzen in (24) ergibt eine Diff.-Gl. für  $G$ :

$$(1 - u^2) \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - 2 u \frac{\partial G}{\partial u} + w \frac{\partial G}{\partial w} + w^4 u G = 0. \quad (30)$$

Die Randbedingung lautet

$$F_r \sim G e^{1/3 p v_1 v^3} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad w \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Ferner muß überall  $G \geq 0$  sein. Eine nähere Diskussion von (30) ergibt, daß diese Bedingungen erfüllbar sind und daß für sehr große  $w$

$$G \approx e^{-1/4 w^4} = e^{-1/4 p v^4} \quad (32)$$

ist. Die exakte Lösung scheint nicht in geschlossener Form darstellbar zu sein. Eine Näherungslösung ist in Anhang C angegeben; eine weitere mit ganz ähnlichem Verlauf wurde durch Entwicklung von  $G$  nach LEGENDRESchen Polynomen hergeleitet.

Die allgemeine Lösung von (24) geht aus (28) durch Multiplikation mit einer Gewichtsfunktion  $C(p)$  und Integration über alle positiven  $p$  hervor:

$$F_r(v, u, x') = \int_0^\infty C(p) G(p^{1/4} v, u) \exp \left\{ -p \left( \alpha x' - \frac{1}{3} v_1 v^3 \right) \right\} dp \quad (33)$$

mit  $x' = x - v_1 t$ .

Für die meisten run-away-Elektronen gilt  $v \gg v_1$ . Daher kann das Glied  $\frac{1}{3} p v_1 v^3$  im Exponenten weggelassen werden, da es klein gegen das laut (32)

auf tretende Glied  $\frac{1}{4} p v^4$  ist. Es bleibt

$$F_r(v, u, x') = \int_0^\infty C(p) G(p^{1/4} v, u) e^{-p \alpha x'} dp. \quad (34)$$

Da zur Anwendung der Dispersionsformel (13) die Kenntnis der Funktion  $f_r$  erforderlich ist, muß (34) noch über  $v_y$  und  $v_z$  integriert werden. Nach Einführung der Funktion

$$g(w_x) = p^{1/2} \iint G dv_y dv_z = 2\pi \int_{|w_x|}^\infty G\left(w, \frac{w_x}{w}\right) w dw \quad (35)$$

mit  $w_x = p^{1/4} v_x$  erhält man

$$f_r(v_x, x') = \int_0^\infty p^{-1/2} C(p) g(p^{1/4} v_x) e^{-p \alpha x'} dp. \quad (36)$$

Der Faktor  $p^{1/2}$  in (35) bewirkt, daß  $g$  dimensionslos wird und nur von  $w_x$  abhängt. Wie aus der Darstellung der numerisch berechneten Funktion  $g(w_x)$  in Abb. 4 hervorgeht, sind infolge der Streuung auch rückläufige run-away-Elektronen in beträchtlicher Anzahl vorhanden. Wesentlich für die Anfachung ist

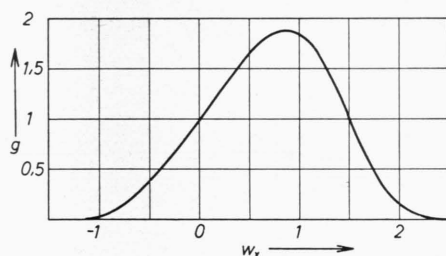


Abb. 4. Geschwindigkeitsverteilung der run-away-Elektronen.

jedoch, daß das Maximum der Kurve außerhalb  $w_x = 0$  liegt, so daß bei Addition einer hinreichend schmalen GAUSS-Verteilung mit dem Schwerpunkt  $w_x = 0$  eine Funktion mit zwei Maxima entsteht.

Für positive  $w_x$  gilt in guter Näherung

$$g \approx (1 + 1,4 w_x) \exp\left\{-\frac{1}{4} w_x^4\right\}. \quad (37)$$

Zur Bestimmung von  $C(p)$  ist die Formulierung einer Randbedingung notwendig. Ist z. B.  $f_r$  an der Stelle  $x' = 0$  vorgegeben, so folgt  $C(p)$  nach (36) aus der Integralgleichung

$$\int_0^\infty p^{-1/2} C(p) g(p^{1/4} v_x) dp = f_r(v_x, 0). \quad (38)$$

Für  $f_r(v_x, 0)$  könnte man die durch (16) gegebene Geschwindigkeitsverteilung  $f_{e2}$  der Elektronen hinter der Stoßfront einsetzen. Für  $v_x \gg v_1$  ist dies auf jeden Fall richtig, da die sehr schnellen Elektro-

nen die Stoßfront praktisch ungestört durchdringen können und daher zu den run-away-Elektronen gezählt werden müssen. Für kleinere und negative  $v_x$  läßt sich  $f_r(v_x, 0)$  nicht eindeutig festlegen, wodurch jedoch keine Schwierigkeiten entstehen, da die langsamen bzw. rückläufigen Elektronen ohnehin nicht unmittelbar in das Anfachungsgebiet eindringen können. Mathematisch kommt dies dadurch zum Ausdruck, daß für  $v_x \lesssim v_1$  die Form von  $f_r(v_x, 0)$  auf die Verteilung  $f_r(v_x, x')$  im Anfachungsgebiet nur einen sehr geringen Einfluß hat. Wir können also auch für diesen Geschwindigkeitsbereich  $f_{e2}$  als Anfangsverteilung verwenden.

Da wir bei Aufstellung der Gl. (24) das elektrische Feld vernachlässigt hatten, müssen wir jedoch berücksichtigen, daß die Elektronen beim Überholen der Stoßfront eine Potentialschwelle  $\Delta U$  zu überwinden haben. Zu diesem Zweck versehen wir die Anfangsverteilung  $f_{e2}$  noch mit dem BOLTZMANN-Faktor  $\exp(e \Delta U / \kappa T_2)$ . Nach KÖLBEL<sup>6</sup> gilt bei starken Stoßwellen  $e \Delta U / \kappa T_2 = -2,16$ ; folglich ist  $\exp(e \Delta U / \kappa T_2) = 0,115$ . Damit erhält die Anfangsverteilung folgende Form

$$\begin{aligned} f_r(v_x, 0) &= 0,115 f_{e2} \\ &= 0,115 n_2 \left( \frac{m_e}{2\pi\kappa T_2} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{m_e}{2\kappa T_2} (v_x - v_1 + v_2)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

$C(p)$  ist nun so zu bestimmen, daß (38) unter Berücksichtigung von (37) und (39) erfüllt ist. Dies ist näherungsweise der Fall für

$$C(p) = \frac{0,115 n_2 m_e}{1,4 \sqrt{8\pi\kappa T_2}} p^{-3/4} \exp\left\{ -\frac{1}{p} \left( \frac{m_e}{2\kappa T_2} \right)^2 \right\}. \quad (40)$$

Einsetzen in (36) ergibt

$$\begin{aligned} f_r(v_x, x') &\approx 0,115 n_2 \left( \frac{m_e}{2\pi\kappa T_2} \right)^{1/2} \\ &\cdot \left[ \frac{1}{1,4(2c^2)^{1/4}} + \frac{v_x}{c} \left( \frac{m_e}{2\kappa T_2} \right)^{1/2} \right] e^{-c^2} \end{aligned} \quad (41)$$

mit der Abkürzung

$$c^2 = \frac{m_e}{2\kappa T_2} (4\alpha x' + v_x^4)^{1/2} \gg 1.$$

Bei der Auswertung des Integrals in (36) wurde von der Beziehung

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty p^n \exp\{-a^2 p - b^2/p\} dp \\ &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{a} \left( \frac{b}{a} \right)^{n+1/2} e^{-2ab} \quad \text{für } ab \gg 1 \end{aligned} \quad (42)$$

Gebrauch gemacht.

Für  $x' = 0$  und große  $v_x$  soll (41) mit (39) übereinstimmen. Dies ist mit einer für unsere Zwecke hinreichenden Genauigkeit erfüllt, wenn man berücksichtigt, daß nach (8) bis (10) gilt

$$\frac{m_e(v_1 - v_2)^2}{2 \kappa T_2} = \frac{15 m_e (M^2 - 1)^2}{(m_1 + m_e) (M^2 + 3) (5 M^2 - 1)} \ll 1. \quad (43)$$

Die Verteilungsfunktion (41) gibt das erwartete physikalische Verhalten der run-away-Elektronen für  $v_x > 0$  richtig wieder. Mit wachsender Entfernung  $x'$  von der Stoßfront nimmt  $f_r$  ab, und zwar um so stärker, je kleiner  $v_x$  ist. Bei konstantem  $x'$  nimmt  $f_r$  mit  $v_x$  zunächst zu und durchläuft ein Maximum bei

$$v_{xm} \approx 0,723 \left( \frac{2 \kappa T_2}{m_e} \right)^{1/4} (4 \alpha x')^{1/8}. \quad (44)$$

Diese „wahrscheinlichste Geschwindigkeit“ nimmt also mit der achten Wurzel aus der Entfernung von der Stoßfront zu.

Die Einschränkung, daß der Exponent von (41) betragsmäßig  $\gg 1$  sein muß, besagt, daß der Ausdruck nur für  $n_r \ll n_2$  gilt. Das ist im wesentlichen gleichbedeutend mit (19). Die Rechnungen haben gezeigt, daß diese Beziehung im Anfachungsgebiet stets erfüllt ist (vgl. Abb. 5).

Zur Auswertung der Dispersionsformel (13) ist der Ausdruck (41) noch zu kompliziert. Wir nähern ihn deshalb durch eine GAUSS-Verteilung an, die so gewählt werden soll, daß sie in den Punkten 0 und  $v_{xm}$  mit (41) übereinstimmt und daß ihr Maximum an der Stelle  $v_{xm}$  liegt. Dadurch wird erreicht, daß das für die Anfachung wichtige Gebiet  $0 < v_x < v_{xm}$  möglichst gut angenähert wird. Es ergibt sich

$$f_r = 0,133 n_2 \left( \frac{m_e}{2 \pi \kappa T_2} \right)^{1/2} \left( \frac{l}{x'} \right)^{1/8} \exp \left\{ - \left( \frac{x'}{l} \right)^{1/2} \right\} \exp \left\{ - \frac{1,25 m_e}{2 \kappa T_2} \left( \frac{l}{x'} \right)^{1/4} (v_x - v_{xm})^2 \right\} \quad (45)$$

Dabei ist

$$l = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\kappa T_2}{m_e} \right)^2 = \frac{(\kappa T_2)^2}{4 \pi e^4 n_1 \ln \Lambda}. \quad (46)$$

Damit ist die Bestimmung von  $f_r$  abgeschlossen. Zur endgültigen Bestimmung von  $f_t$  muß jedoch noch das in (22) auftretende Integral berechnet werden. Dabei können wir die Stoßwellengeschwindigkeit  $v_1$  unter dem Integralzeichen gegenüber dem  $v_x$  vernachlässigen, da die Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  bei den meisten run-away-Elektronen sehr viel größer als  $v_1$  ist. Damit folgt aus (22)

$$T_t \approx T_1 \left( 1 + \frac{m_e}{3 n_1 v_1 \kappa T_1} \int v_x v^2 F_r dv \right). \quad (47)$$

Die numerische Rechnung ergab

$$\int v_x v^2 F_r dv = 0,104 n_2 \left( \frac{2 \kappa T_2}{m_e} \right)^{3/2} \left( \frac{x'}{l} \right)^{3/8} \exp \left\{ - \left( \frac{x'}{l} \right)^{1/2} \right\} \quad (48)$$

Damit ist die Temperatur  $T_t$  auf bekannte Größen zurückgeführt.  $f_t$  ergibt sich aus (21) zu

$$f_t(v_x, x') = n_1 \left( \frac{m_e}{2 \pi \kappa T_t} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{m_e}{2 \kappa T_t} v_x^2 \right\}. \quad (49)$$

In Abb. 5 ist der Verlauf einiger Zustandsgrößen, wie er sich nach den in diesem Abschnitt durchgeführten Rechnungen im Anfachungsgebiet der Stoßfront ergibt, für den Fall  $M = 10$  graphisch darge-

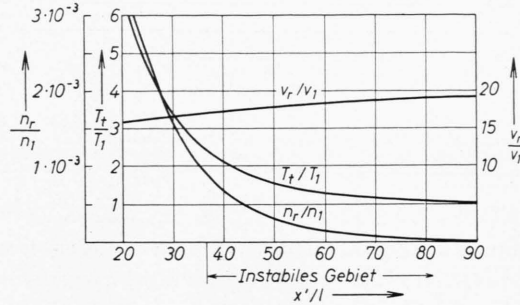


Abb. 5. Elektronentemperatur  $T_e \approx T_t$ , Konzentration und mittlere Geschwindigkeit der run-away-Elektronen im Anfachungsgebiet.  $M = 10$ .

stellt. Die mittlere Geschwindigkeit der run-away-Elektronen ist gleich dem 15- bis 20-fachen der Stoßwellengeschwindigkeit, ihre Konzentration liegt in der Größenordnung  $10^{-3}$ . Bei höheren MACH-Zahlen ergeben sich ähnliche Werte. Die Vernachlässigungen, die sich auf die Annahmen  $v_x \gg v_1$  und  $n_r \ll n_1$  gründeten, sind damit nachträglich gerechtfertigt.

Wie bereits aus den Gln. (45) und (48) hervorgeht, ist die Größe  $l$ , die bis auf einen Faktor von der Größenordnung 1 gleich der mittleren freien Weglänge der Elektronen hinter der Stoßfront ist, die charakteristische Länge für die Zustandsänderungen. Dies stimmt mit den Ergebnissen von JUKES<sup>7</sup> und KÖLBEL<sup>6</sup> überein, nach denen die Breite der Stoßfront einige mittlere freie Weglängen der aufgeheizten Plasmateilchen beträgt.

## 6. Die Auswertung der Dispersionsformel

Mit  $f_{e0} = f_t + f_r$  lautet die Dispersionsformel (13)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_t / \partial v_x}{v_x - \omega/k} dv_x + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_r / \partial v_x}{v_x - \omega/k} dv_x = \frac{m_e k^2}{4 \pi e^2}. \quad (50)$$

Für  $f_t$  und  $f_r$  sind die durch (49) und (45) gegebenen GAUSS-Verteilungen einzusetzen. Die Integrale lassen sich mittels der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x-z} = -2\sqrt{\pi} e^{-z^2} \int_0^z e^{\xi^2} d\xi \pm \pi i e^{-z^2} \quad (51)$$

auf Fehlerfunktionen komplexen Arguments zurückführen. Das obere Vorzeichen gilt für  $\text{Im}(z) > 0$ , das untere für  $\text{Im}(z) < 0$ . Es erweist sich als zweckmäßig, dimensionslose Größen einzuführen, indem man alle Geschwindigkeiten als Vielfache der Stoßwellengeschwindigkeit  $v_1$  darstellt und die Wellenzahl auf die DEBYE-Wellenzahl

$$k_D = \left( \frac{4\pi e^2 n_1}{\kappa T_1} \right)^{1/2} \quad (52)$$

bezieht. Die dimensionslose komplexe Phasengeschwindigkeit ist hiernach gegeben durch

$$u_p + i u_i = \frac{\omega}{v_1 k} = \frac{\text{Re}(\omega)}{v_1 k} + i \frac{\text{Im}(\omega)}{v_1 k}. \quad (53)$$

Unter Verwendung der Ergebnisse der Abschnitte 2 und 5 stellt sich heraus, daß als Variable nur die fünf Größen  $M$ ,  $x'/l$ ,  $u_p$ ,  $u_i$  und  $k/k_D$  in die Dispersionsformel (50) eingehen, wovon wiederum nur drei unabhängig sind, da (50) in Real- und Imaginärteil zerfällt und somit einem System von zwei reellen Gleichungen äquivalent ist. Die Auswertung der Dispersionsgleichung wird dadurch erleichtert, daß die Anfachung relativ klein ist. Wie die Rechnungen ergeben haben, ist stets  $u_i \ll 1$ , so daß man nach Potenzen von  $u_i$  entwickeln und nach dem ersten Gliede abbrechen kann. Dadurch wird (50) linear in  $u_i$  und man kann  $u_i$  und  $k/k_D$  sofort angeben, wenn  $M$ ,  $x'/l$  und  $u_p$  vorgegeben sind. Es zeigt sich dabei, daß ein  $u_i$  nur dann existiert, wenn diese drei Größen so gewählt werden, daß (14) erfüllt ist.

Als Maß für die Stärke der Anfachung verwenden wir die Größe

$$\beta = \text{Im}(\omega)/\text{Re}(\omega) = u_i/u_p. \quad (54)$$

Der Maximalwert dieser Größe ist in Abb. 6 als Funktion von  $x'/l$  bei  $M=10$  und in Abb. 8 als Funktion von  $M$  dargestellt (obere Kurve). Sie erreicht im Höchstfall die Größenordnung  $10^{-4}$ , ist also sehr klein. Da aber  $\omega_p = 5,6 \cdot 10^4 \sqrt{n_e} \text{ sec}^{-1}$  ist, erreicht die Amplitude schon nach Sekundenbruchteilen ihre volle Höhe, falls es sich nicht um ein extrem dünnes Plasma handelt. Die Maximalampli-

tude läßt sich natürlich nur durch Berücksichtigung der Nichtlinearitäten in den Grundgleichungen ermitteln. Diesbezügliche Rechnungen sind für den stationären Fall von LARENZ<sup>10</sup> durchgeführt worden.

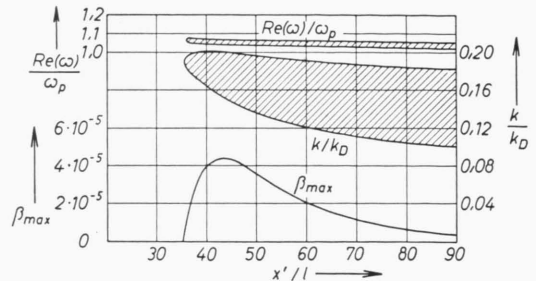


Abb. 6. Maximale Anfachungsstärke, Frequenz- und Wellenzahlbereiche.  $M=10$ .

Erwähnt sei noch, daß bei *endlicher* Amplitude neben dem in 3 beschriebenen Anfachungsmechanismus noch ein weiterer, in seinen Wirkungen ganz ähnlicher Effekt auftritt. Es handelt sich hierbei um den Einfang von Elektronen in den Potentialtälern der Welle. Dieser Mechanismus wird bei JACKSON<sup>9</sup> als *trapping* bezeichnet. War die Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  eines eingefangenen Elektrons vor dem Einfang größer als die Phasengeschwindigkeit  $v_p$  der Welle, so hat sich ein Teil seiner kinetischen Energie in Schwingungsenergie umgewandelt, d. h. die Welle ist angefacht worden. War umgekehrt  $v_x < v_p$ , so hat das Elektron der Welle beim Einfang Energie entzogen. Je nachdem, welcher Prozeß häufiger stattfindet, wird die Welle gedämpft oder angefacht. Wie eine leichte Überlegung zeigt, kann auch hier Anfachung nur eintreten, wenn  $f_e$  zwei Maxima hat.

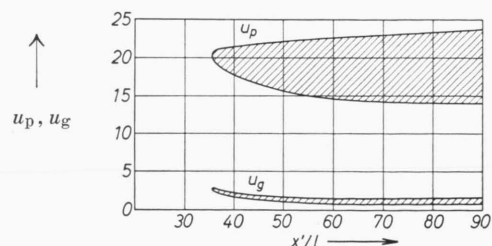


Abb. 7. Phasen- und Gruppengeschwindigkeitsbereich.  $M=10$ .

Aus Abb. 8 geht hervor, daß Schwingungserregung erst dann einsetzt, wenn die MACH-Zahl einen bestimmten Wert überschreitet, der bei  $M=6,5$  liegt.

<sup>10</sup> R. W. LARENZ, Z. Naturforschg. **10 a**, 766 [1955].



Bemerkenswert ist hierbei, daß die Stoßwellengeschwindigkeit in diesem Falle noch wesentlich kleiner ist als die Elektronenschallgeschwindigkeit  $\sqrt{5} \kappa T_1 / 3 m_e$  im ungestörten Plasma.

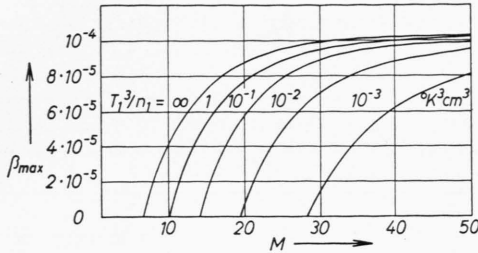


Abb. 8. Maximale Anfachungsstärke bei Berücksichtigung der OHMSchen Dämpfung.

In Abb. 6 und 7 sind für  $M = 10$  ferner die oberen und unteren Grenzen für die Frequenzen, Wellenzahlen, Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten dargestellt. Bei höheren MACH-Zahlen ergeben sich keine wesentlich anderen Werte. Wichtig für die Anfachung ist die Tatsache, daß die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = v_1 u_g = \frac{d}{dk} \operatorname{Re}(\omega) \quad (55)$$

ungefähr gleich der Stoßwellengeschwindigkeit ist ( $u_g \approx 1$ ). Wäre dies anders, so würden die Wellengruppen das Anfachungsgebiet verlassen, bevor sie eine nennenswerte Intensität erreicht haben.

Ein Vergleich mit Abb. 5 zeigt, daß die Phasengeschwindigkeiten etwa den Geschwindigkeiten der run-away-Elektronen entsprechen. Die Frequenzen sind um einige Prozent größer als die Plasmafrequenz. Die zugehörigen Wellenlängen  $2\pi/k$  betragen 30 bis 60 DEBYE-Längen, wobei die DEBYE-Länge gleich  $1/k_D$  ist (52). LARENZ<sup>11</sup> ist auf andere Weise zu einem ähnlichen Resultat gekommen.

## 7. Berücksichtigung der Dämpfung

Die Dämpfung der Schwingungen durch Stöße wird durch die Dispersionsformel (13) bzw. (50) nicht erfaßt, da wir in der Ausgangsgleichung (11) das Wechselwirkungsglied fortgelassen haben. Wegen der Kompliziertheit dieses Gliedes geht man zur Berechnung der Dämpfung besser von den hydro-

dynamischen Grundgleichungen aus. Ist  $v_e$  die Strömungsgeschwindigkeit der Elektronen und werden die Ionen als ruhend angenommen, so ist die elektrische Stromdichte  $j = -n_e e v_e$  und die Bewegungsgleichung lautet bei Vernachlässigung der in diesem Zusammenhang unwesentlichen Druckkräfte

$$m_e \frac{\partial v_e}{\partial t} + e E + \frac{n_e e^2 v_e}{\sigma} = 0. \quad (56)$$

Die Leitfähigkeit  $\sigma$  ist nach SPITZER<sup>12</sup> gegeben durch

$$\sigma = \frac{1,1632 (2 \kappa T)^{3/2}}{\pi^{3/2} e^2 \sqrt{m_e} \ln \Lambda} \quad (57)$$

mit

$$\Lambda = (\kappa T)^{3/2} / e^3 \sqrt{\pi n_e}.$$

Zu (56) tritt noch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial n_e v_e}{\partial x} = 0. \quad (58)$$

Zusammen mit der Poissonschen Gl. (12) dienen (56) und (58) zur Berechnung von  $n_e$ ,  $v_e$  und  $E$ . Nach Linearisierung läßt sich dieses System in bekannter Weise mit dem Exponentialansatz

$$\exp(i \omega' t - i k x)$$

lösen, wobei sich als Schwingungsfrequenz ergibt

$$\omega' = i \omega_c \pm \sqrt{\omega_p^2 - \omega_c^2} \quad (59)$$

mit der Plasmafrequenz

$$\omega_p = \left( \frac{4 \pi e^2 n_e}{m_e} \right)^{1/2} \quad (60)$$

und

$$\omega_c = n_e e^2 / 2 m_e \sigma. \quad (61)$$

Der Realteil von (59) hat infolge Vernachlässigung des Druckgliedes in (56) nur beschränkte Gültigkeit. Hier ist jedoch nur der Imaginärteil  $\omega_c$  von Interesse. Die durch ihn beschriebene OHMSche Dämpfung wirkt der Anfachung entgegen, so daß jetzt statt (54) gilt

$$\beta = [\operatorname{Im}(\omega) - \omega_c] / \operatorname{Re}(\omega). \quad (62)$$

Aus (57) und (61) und  $\operatorname{Re}(\omega) \sim n_e^{1/2}$  folgt, daß  $\omega_c / \operatorname{Re}(\omega) \sim n_e^{1/2} / T^{3/2}$  ist. Daher hängt  $\beta$  jetzt außer von  $M$ ,  $x'/l$  und  $u_p$  auch noch von  $T_1^3/n_1$  ab in dem Sinne, daß die Stabilität des Plasmas zunimmt, wenn dieser Ausdruck kleiner wird. In Abb. 8 ist der Maximalwert von  $\beta$  in Abhängigkeit von  $M$  bei ver-

<sup>11</sup> R. W. LARENZ, Self-Interaction of Longitudinal Plasma Oscillations with Generation of Electromagnetic Radiation, in „Symposium on Electromagnetic Theory and Antennas“, Kopenhagen, Juni 1962, Pergamon Press 1963, S. 349.

<sup>12</sup> R. S. COHEN, L. SPITZER u. P. MCROUTLY, Phys. Rev. **80**, 230 [1950].

schiedenen Werten von  $T_1^3/n_1$  aufgetragen. Die kritische MACH-Zahl  $M_k$ , die überschritten werden muß, wenn Schwingungserregung auftreten soll, ist in Abb. 9 dargestellt. Mit zunehmendem  $T_1^3/n_1$  nähert sie sich dem in Abschnitt 6 angegebenen Mindestwert  $M_k = 6,5$ .

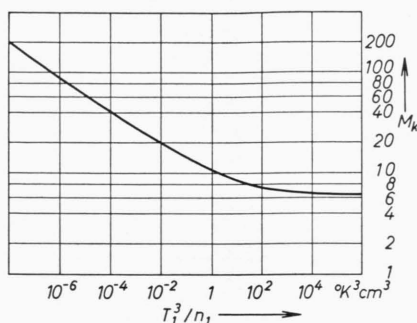


Abb. 9. Kritische MACH-Zahl, bei deren Überschreitung Schwingungen angefacht werden.

## 8. Anwendung auf die Radiofrequenzstrahlung der Sonne

Die Radiofrequenzstrahlung der Sonne enthält neben der thermischen Komponente noch einen weiteren Anteil, der in komplizierter Weise aus kurzdauernden Einzelimpulsen großer Amplitude zusammengesetzt ist und häufig als Begleiterscheinung von Eruptionen (*flares*) auftritt. Wie man heute weiß, wird ein Teil dieser Strahlung durch Elektronenschwingungen in der Korona erzeugt. Im Hinblick hierauf haben BURKHARDT, FAHL und LARENZ<sup>13</sup> die Kopplungsmechanismen zwischen Elektronenschwingungen und elektromagnetischen Wellen untersucht.

Es ist nun naheliegend, die Elektronenschwingungen in der Korona auf Stoßwellen zurückzuführen<sup>2-6</sup>. Aus der Koronatemperatur  $T \approx 10^6$  °K ergibt sich nach Gl. (8) eine Schallgeschwindigkeit  $a_0 \approx 150$  km/sec. Aus Abb. 9 folgt, daß die Dämpfung durch Stöße hier keine Rolle spielt, da die Dichte stets kleiner ist als  $10^{10}$  cm<sup>-3</sup> und daher  $T^3/n > 10^8$  °K<sup>3</sup> cm<sup>3</sup>. Die kritische MACH-Zahl liegt also bei 6,5, so daß von einer Stoßwellengeschwindigkeit von  $6,5 \cdot 150 = 10^3$  km/sec an Schwingungsanfachung zu erwarten ist. Solche Geschwindigkeiten werden in der Tat bei Ausbrüchen vom sog.

Typ II beobachtet (s. <sup>5</sup>, S. 303). Die gemessenen Bandbreiten betragen etwa 3 bis 5 Prozent der Plasmafrequenz<sup>4, 14</sup>, was mit den berechneten Werten gut übereinstimmt (Abb. 6). Für die zur Anfachung benötigte Zeit ergeben sich sehr kleine Werte. Ist z. B.  $\text{Im}(\omega)/\omega_p \approx \beta = 10^{-6}$  (vgl. Abb. 8) und  $\omega_p = 6 \cdot 10^8$  sec<sup>-1</sup>, was einer Elektronendichte von  $10^8$  cm<sup>-3</sup> entspricht, so ist  $1/\text{Im}(\omega) = 2 \cdot 10^{-3}$  sec. Die Dauer eines Strahlungsausbruchs beträgt dagegen einige Minuten, die der Einzelimpulse 0,5 bis 5 sec, so daß die Maximalamplitude mit Sicherheit erreicht wird.

Eine obere Grenze für die Dauer der Einzelimpulse ergibt sich aus der Bandbreite. Setzt man diese zu 5 Prozent an, so muß die Wellengruppe spätestens zusammengebrochen sein, sobald sich beim Fortschreiten der Stoßwelle in der Korona die Plasmafrequenz um 5 Prozent, die Dichte also um 10 Prozent geändert hat. Die entsprechenden Entfernungen betragen in der unteren Korona etwa  $10^3$  bis  $10^4$  km. Bei einer Stoßwellengeschwindigkeit von  $10^3$  km/sec würden sich also Lebensdauern von 1 bis 10 sec ergeben, was mit den obigen gemessenen Werten größenordnungsmäßig übereinstimmt.

Schwieriger ist die räumliche Ausdehnung des Anfachungsgebietes mit den Beobachtungsergebnissen in Einklang zu bringen. Für die run-away-Elektronen in der Korona ergibt sich nach (46) eine mittlere freie Weglänge von 0,1 Sonnendurchmessern. Die Breite des Anfachungsgebietes ist nach Abb. 6 noch um einen Faktor  $10^2$  größer. Andererseits muß aber die räumliche Ausdehnung der Strahlungsquelle so klein sein, daß innerhalb ihres Bereichs die Elektronendichte noch als konstant angesehen werden kann, da sich andernfalls größere Bandbreiten ergeben müßten. Wir schließen daraus, daß die wahre mittlere freie Weglänge nicht durch den Ausdruck (46) dargestellt wird. Nach einer Theorie von LARENZ<sup>15</sup>, die von der kollektiven Wechselwirkung der Plasmateilchen ausgeht, ergeben sich wesentlich kleinere Werte. Wahrscheinlich muß man auch berücksichtigen, daß die Plasmaschwingungen eine Geschwindigkeitsmodulation der run-away-Elektronen verursachen, wodurch ihre Wechselwirkung mit den thermischen Elektronen und den Ionen verstärkt und die mittlere freie Weglänge verkleinert wird.

<sup>13</sup> G. BURKHARDT, CH. FAHL u. R. W. LARENZ, Z. Phys. **161**, 380 [1961].

<sup>14</sup> Symposium No. IV of the International Astronomical

Union, Cambridge University Press, Cambridge 1957, S. 363.

<sup>15</sup> R. W. LARENZ, Naturwiss. **48**, 40 [1961].

Die Theorie der run-away-Elektronen ermöglicht auch einen qualitativen Deutungsversuch der Strahlungstöße vom sog. Typ III. Da diese Stöße oft als Vorläufer von Eruptionen auftreten, liegt es nahe, von einer Stoßwelle auszugehen, die gerade im Entstehen begriffen ist. Eine solche instationäre Stoßwelle bleibt auch nach dem Überschreiten der kritischen MACH-Zahl noch solange gegen Plasmaschwingungen stabil, bis genügend run-away-Elektronen die Stoßfront überholt haben. Die Schwingungsanfachung wird dann nicht gleichzeitig im ganzen Anfachungsgebiet einsetzen, sondern zunächst in der Nähe der Stoßfront. Von dort breitet sie sich mit einer Geschwindigkeit aus, die größenordnungsmäßig gleich der Geschwindigkeit der run-away-Elektronen sein dürfte, also etwa gleich der zwanzigfachen Stoßwellengeschwindigkeit. Auf diese Weise könnten die hohen Geschwindigkeiten der Strahlungsquellen vom Typ III zustande kommen, die bis in die Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit reichen.

Aus den gleichen Gründen wie beim Typ II muß die räumliche Ausdehnung der Strahlungsquelle klein gegen die durch (46) definierte freie Weglänge sein. Das bedeutet hier, daß die an irgendeiner Stelle in der Korona angefachte Schwingung unter gleichzeitiger Anfachung an einer benachbarten Stelle sofort wieder abklingt. Dieses Abklingen könnte z. B. durch den in Abschnitt 6 beschriebenen Einfang von run-away-Elektronen verursacht werden, deren Geschwindigkeit kleiner als die Phasengeschwindigkeit der Welle ist. Diese Annahme ist deswegen naheliegend, weil an der betreffenden Stelle im Plasma zunächst nur sehr schnelle run-away-Elektronen vorhanden sind, während die langsameren erst entsprechend später eintreffen. Es ist zu erwarten, daß dieser Effekt im instationären Fall wesentlich stärker ausgeprägt ist als bei einer stationären Stoßwelle.

Die hier gegebene Deutung der Stöße vom Typ III hat den Vorteil, daß sie ohne Magnetfeld auskommt und daß keine physikalisch wenig plausiblen Strömungs- und Stoßwellengeschwindigkeiten von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit auftreten.

Herrn Professor Dr. LARENZ bin ich für die Stellung des Themas sowie für zahlreiche Anregungen und Diskussionen zu großem Dank verpflichtet; ebenso danke ich Herrn Professor Dr. BURKHARDT für die Einräumung eines Arbeitsplatzes sowie für sein förderndes Interesse.

Diese Arbeit wurde von den „Cambridge Research

Laboratories“ des Office of Aerospace Research, United States Air Force, durch deren European Office gefördert.

## Anhang A

### Die Wechselwirkungsglieder der Fokker-Planck-Gleichung

Nach ROSENBLUTH<sup>16</sup> hat das in den Grundgleichungen (1) bzw. (23) auftretende Wechselwirkungsglied folgende Form:

$$\left(\frac{\partial F_a}{\partial t}\right)_c = -\frac{\partial}{\partial v_\mu} \langle \Delta v_\mu \rangle F_a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \langle \Delta v_\mu \Delta v_\nu \rangle F_a. \quad (63)$$

Die drei Geschwindigkeitskomponenten sind durch griechische Indizes unterschieden. Über gleiche Indizes ist zu summieren. Der Index a kennzeichnet die Teilchenart. Ferner ist

$$\langle \Delta v_\mu \rangle = \Gamma \frac{\partial h_1}{\partial v_\mu}, \quad (64)$$

$$\langle \Delta v_\mu \Delta v_\nu \rangle = \Gamma \frac{\partial^2 h_2}{\partial v_\mu \partial v_\nu}, \quad (65)$$

mit

$$h_1 = \sum_b \frac{m_a + m_b}{m_b} \int \frac{F_b(v') dv'}{|v - v'|}, \quad (66)$$

$$h_2 = \sum_b \int \frac{1}{|v - v'|} F_b(v') dv'. \quad (67)$$

Es ist über alle Teilchenarten zu summieren.

$$\Gamma = \frac{4\pi e^4}{m_a^2} \ln \frac{m_a u_r^2 \lambda_D}{2e^2}; \quad (68)$$

$\lambda_D$  ist die DEBYE-Länge,  $m_{ab}$  die reduzierte Masse und  $u_r^2$  das mittlere Quadrat der Relativgeschwindigkeit der Teilchen a und b.

Zur Bestimmung der rechten Seite von (23) haben wir in diesen Formeln  $m_a$  durch  $m_e$  und  $F_a$  durch  $F_r$  zu ersetzen. Für den Index b ist i und e einzusetzen. Vernachlässigt man in (66)  $m_e$  gegen  $m_i$ , so wird aus (66) und (67)

$$h_1 = \int \frac{F_i(v') dv'}{|v - v'|} + 2 \int \frac{F_e(v') dv'}{|v - v'|}, \quad (69)$$

$$h_2 = \int |v - v'| F_i(v') dv' + \int |v - v'| F_e(v') dv'. \quad (70)$$

Da nach Abschnitt 5 bei der Berechnung der Wechselwirkung mit verschwindenden Temperaturen operiert werden kann, sind für  $F_i$  und  $F_e$   $\delta$ -Funktionen anzusetzen:

$$F_i = F_e = n_i \delta(v). \quad (71)$$

Einsetzen in (69) und (70) ergibt

$$h_1 = 3 n_i / v, \quad h_2 = 2 n_i v \quad (72)$$

<sup>16</sup> M. N. ROSENBLUTH, W. M. MACDONALD u. D. L. JUDD, Phys. Rev. **107**, 1 [1957].

mit  $v = |v|$ . Damit wird

$$\langle \Delta v_\mu \rangle = -3 n_1 \Gamma \frac{v_\mu}{v^3}, \quad (73)$$

$$\langle \Delta v_\mu \Delta v_\nu \rangle = 2 n_1 \Gamma \frac{v^2 \delta_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu}{v^3}. \quad (74)$$

Setzt man dies in (63) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial F_r}{\partial t} \right)_c &= n_1 \Gamma \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial^2 F_r}{\partial v_\mu \partial v_\mu} - \frac{v_\mu}{v^3} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left( v_\nu \frac{\partial F_r}{\partial v_\nu} \right) \right] \\ &\equiv \frac{n_1 \Gamma}{v} \left[ \nabla^2 F_r - \frac{v}{v^2} \nabla (v \nabla F_r) \right]. \end{aligned} \quad (75)$$

Führt man Polarkoordinaten ein,

$$v = (v_x, v_y, v_z) = (v \cos \vartheta, v \sin \vartheta \cos \varphi, v \sin \vartheta \sin \varphi) \quad (76)$$

und berücksichtigt, daß  $F_r$  nicht von  $\varphi$  abhängt, da wir nur eindimensionale Vorgänge behandeln, so wird aus (75)

$$\left( \frac{\partial F_r}{\partial t} \right)_c = \frac{n_1 \Gamma}{v^3} \left( v \frac{\partial F_r}{\partial v} + \frac{\partial^2 F_r}{\partial v^2} + \cotg \vartheta \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right). \quad (77)$$

Dieser Ausdruck wird identisch mit der rechten Seite von (24), wenn man  $\cos \vartheta = u$  und  $n_1 \Gamma = \alpha$  setzt.

In (68) ist für  $\lambda_D$  die DEBYE-Länge im Anfachungsgebiet einzusetzen:

$$\lambda_D = \sqrt{\kappa T_1 / 4 \pi e^2 n_1}. \quad (78)$$

Ferner ist  $u_r$  in unserem Falle etwa gleich der mittleren Geschwindigkeit der run-away-Elektronen, also  $\approx \sqrt{3 \kappa T_2 / m_e}$ . Da sich die reduzierten Massen  $m_{ei}$  und  $m_{ee}$  um den Faktor 2 unterscheiden, müßten eigentlich zwei verschiedene  $\Gamma$  eingeführt werden. Da dieser Faktor jedoch nur unter dem Logarithmus vorkommt, kann er vernachlässigt und  $m_{ab}$  durch  $m_e$  ersetzt werden. Dann ergibt sich für  $\alpha = n_1 \Gamma$  der Ausdruck (27).

## Anhang B

### Das elektrische Feld im Anfachungsgebiet

Die run-away-Elektronen bilden eine Raumladung  $\rho_r = -e n_r$  und einen elektrischen Strom  $j_r = -e n_r v_r$ . Der gesamte Strom ist jedoch wesentlich kleiner, da  $j_r$  wegen der guten Leitfähigkeit des Plasmas durch einen von den thermischen Elektronen gebildeten Strom  $j_t$  fast vollständig kompensiert wird. Bei unendlich guter Leitfähigkeit würde gelten

$$j_r = -e n_r v_r = -j_t. \quad (79)$$

Die Leitfähigkeit  $\sigma$  sei so groß, daß diese Beziehung noch näherungsweise gültig ist. Aus dem OHMSchen Gesetz

$$j_t = \sigma E \quad (80)$$

folgt dann

$$E \approx e n_r v_r / \sigma. \quad (81)$$

Der Einfluß des Stromes  $j_t$  auf die Geschwindigkeitsverteilung  $F_t$  ist wegen  $n_t \gg n_r$  vernachlässigbar klein.

Wir wollen nun untersuchen, inwieweit die Vernachlässigung des elektrischen Feldes  $E$  in der FOKKER-PLANCK-Gleichung (23) gerechtfertigt ist. Dazu setzen wir auf der rechten Seite von (23) den Ausdruck (75) ein und fassen gleichartige Glieder zusammen. Das Glied, in dem die Feldstärke  $E$  vorkommt, lautet dann

$$\left( n_1 \Gamma \frac{v_x}{v^3} - \frac{e}{m_e} E \right) \frac{\partial F_r}{\partial v_x}. \quad (82)$$

Hiernach kann  $E$  vernachlässigt werden, sobald

$$q = e E v^3 / m_e n_1 \Gamma v_x \ll 1 \quad (83)$$

ist. Für beliebig große  $v$  ist dies offenbar nicht erfüllt. Für uns ist jedoch hauptsächlich die Geschwindigkeit  $v_r$  von Interesse. Wir setzen daher  $v = v_x = v_r$ . Mit (81) und  $n_1 \Gamma = \alpha$  ergibt sich dann

$$q = e^2 n_r v_r^3 / m_e \alpha \sigma. \quad (84)$$

Wir schätzen diesen Ausdruck ab, indem wir die mittlere Geschwindigkeit  $v_r$  durch die wahrscheinlichste Geschwindigkeit  $v_{xm}$  ersetzen, die nach (44) und (46) durch

$$0,723 \left( \frac{2 \kappa T_2}{m_e} \right)^{1/2} \left( \frac{x'}{l} \right)^{1/8} \quad (85)$$

gegeben ist. Für  $\sigma$  ist der Ausdruck (57) mit  $T = T_t$  einzusetzen und  $\alpha$  ist durch (27) gegeben. Man erhält

$$q \approx 0,6 \frac{n_r}{n_1} \left( \frac{T_2}{T_t} \right)^{1/2} \left( \frac{x'}{l} \right)^{3/8}. \quad (86)$$

Setzt man hier die entsprechenden Werte ein, so ergibt sich, daß im Anfachungsgebiet, welches etwa von  $x'/l = 36$  bis  $x'/l = 80$  reicht,  $q$  stets kleiner als 0,1 ist. Damit ist gezeigt, daß die Vernachlässigung von  $E$  im Rahmen unserer Genauigkeitsansprüche gerechtfertigt ist.

## Anhang C

### Näherungslösung der Gl. (30)

Geht man mit dem Ansatz

$$G = \exp \left\{ -\frac{1}{4} w^4 + \psi(u) w^2 \right\} \quad (87)$$

in die Gl. (30) hinein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} [(1-u^2) \psi'^2 + u - 1] w^4 \\ + [(1-u^2) \psi'' - 2u\psi' + 2\psi] w^2 = 0. \end{aligned} \quad (88)$$

Diese Beziehung ist nicht für beliebige Kombinationen von  $w$  und  $u$  erfüllbar, jedoch kann man  $\psi(u)$  so bestimmen, daß das erste Glied identisch und das zweite im Mittel, d. h. nach Integration über  $u$  von  $-1$  bis  $+1$ , verschwindet. Dies ist der Fall für

$$\psi = 2 \sqrt{1+u} - \frac{4}{3} \sqrt{2}. \quad (89)$$

Die Näherungslösung heißt also

$$G \approx \exp \left\{ -\frac{1}{4} w^4 + (2 \sqrt{1+u} - \frac{4}{3} \sqrt{2}) w^2 \right\}. \quad (90)$$